Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 5.1 Seien $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, $u_0 \in U$ ein Punkt und $\delta > 0$ die Schrittweite.
Die diskrete Picard-Ieration, wobei das Integral durch die rechtslastige Riemannsumme anngenähert ist, lautet

$$\tilde{\gamma}_{n+1}(i\delta) = u_0 + \sum_{k=1}^{i} X(\tilde{\gamma}_n(k\delta))\delta. \tag{1}$$

Behauptung: Ein Fixpunkt $\tilde{\gamma}$ von (1) erfüllt die Bedingung

$$\tilde{\gamma}((i+1)\delta) - \tilde{\gamma}(i\delta) = X(\tilde{\gamma}((i+1)\delta))\delta.$$

Beweis. Sei $\tilde{\gamma}$ ein Fixpunkt von (1), so gilt

$$\tilde{\gamma}(i\delta) = u_0 + \sum_{k=1}^{i} X(\tilde{\gamma}(k\delta))\delta \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus folgt direkt

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}((i+1)\delta) &= u_0 + \sum_{k=1}^{i+1} X(\tilde{\gamma}(k\delta))\delta \\
&= u_0 + \sum_{k=1}^{i} X(\tilde{\gamma}(k\delta))\delta + X(\tilde{\gamma}((i+1)\delta))\delta \\
&= \tilde{\gamma}(i\delta) + X(\tilde{\gamma}((i+1)\delta))\delta
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\gamma}((i+1)\delta) - \tilde{\gamma}(i\delta) = X(\tilde{\gamma}((i+1)\delta))\delta$$

□

Aufgabe 5.2 Die Integralkurven des Vektorfeldes

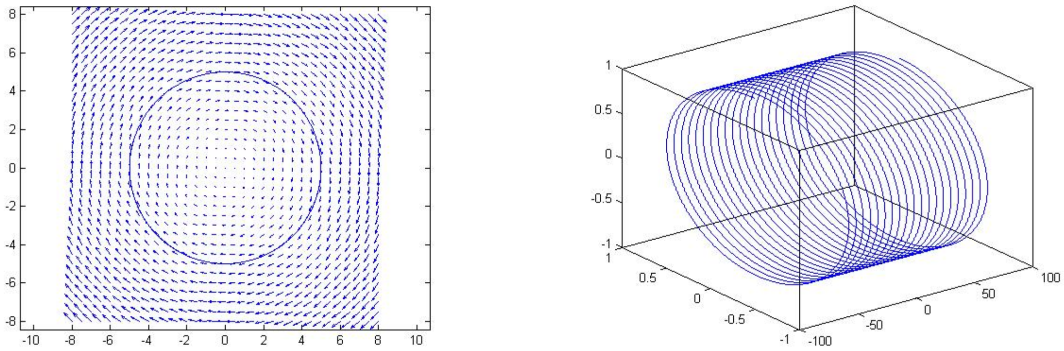
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

haben die Form

$$\gamma(t) = \alpha \begin{pmatrix} cos(t) \\ -sin(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Die Integralkurven sind konzentrische Kreise mit Radius $r := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und haben ihren Mittelpunkt im Ursprung, denn es gilt

$$\|\gamma(t) - 0\|_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



(a)

(b)

Abbildung 1: a) Vektorfeld und eine Lösungskurve, b) Lösungskurve für $\alpha = 0$ und $\beta = 1$

Interpretiert man die Intagralkurve γ beispielsweise als Bahngleichung eines Teilchens, so ist $v := \|\gamma'(t)\|_2$ seine Geschwichtigkeit zum Zeitpunkt t.

$$v = \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = r$$

So gilt nun für die Umlaufzeit T

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Aufgabe 5.3

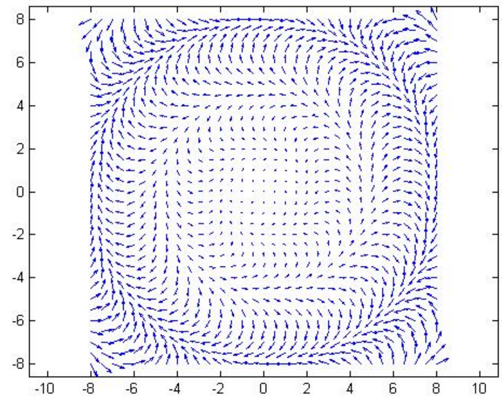
(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{x^2+y^2})y + \cos(\sqrt{x^2+y^2})x \\ \cos(\sqrt{x^2+y^2})y - \sin(\sqrt{x^2+y^2})x \end{pmatrix}$

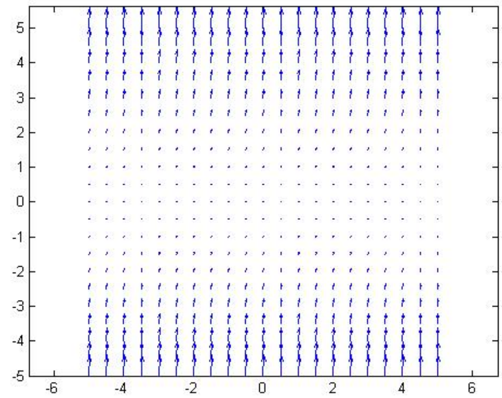
(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 \end{pmatrix}$

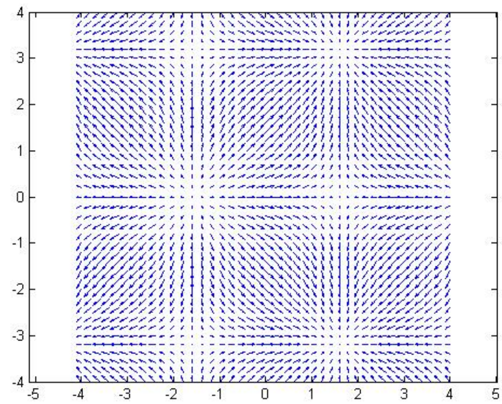
(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(y) \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(xy) \end{pmatrix}$

Im Folgenden sind die Abbildungen der oben genannten Vektorfelder der Reihe nach angeordnet.


8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5
-6 -4 -2 0 2 4 6


4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5